Лекция 6

«Законы Сохранения»

PhD, Жақыпов Әлібек Серікұлы

Закон сохранения импульса

Изолированной механической системой тел называется система, на которую не действуют внешние силы.

Рассмотрим механическую систему состоящую из n тел. Запишем второй закон Ньютона:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1) = \vec{F}_1' + \vec{F}_1 \\
&\frac{d}{dt}(m_2\vec{v}_2) = \vec{F}_2' + \vec{F}_2 \\
&\bullet \quad \bullet \quad \bullet \\
&\frac{d}{dt}(m_n\vec{v}_n) = \vec{F}_n' + \vec{F}_n
\end{aligned}\right\}$$

Где: $\vec{F}_1'$, $\vec{F}_2'$, $\vec{F}_n'$ - равнодействующие внутренних консервативных сил

$\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_n$ - равнодействующие внешних консервативных сил

(+) сложим почленно

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_n\vec{v}_n) = \vec{F}_1' + \vec{F}_2' + \cdots + \vec{F}_n' + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

По 3-му закону Ньютона геометрическая сумма внутр. сил = 0, т.е.

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_n\vec{v}_n) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$ Где $\vec{p} = \sum_{i=1}^{n}(m_i\vec{v}_i)$ - импульс системы

Для изолированной системы внешних сил нет $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = 0} \Rightarrow$$

Закон сохранения импульса.

$$\boxed{\vec{p} = const}$$

Импульс замкнутой системы сохраняется.

Закон сохранения энергии

Рассмотрим механическую систему состоящую из n тел. Запишем второй закон Ньютона:

$$\left.\begin{aligned} m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} &= \vec{F}_1' + \vec{F}_1 \\ m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt} &= \vec{F}_2' + \vec{F}_2 \\ &\bullet\ \bullet\ \bullet \\ m_n\frac{d\vec{v}_n}{dt} &= \vec{F}_n' + \vec{F}_n \end{aligned}\right\}$$

Где: $\vec{F}_1'$, $\vec{F}_2'$, $\vec{F}_n'$ - равнодействующие внутренних консервативных сил

$\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_n$ - равнодействующие внешних консервативных сил

Умножим каждое на dr_i, при этом помним, что: $dr_i = \vec{v}_i \cdot dt$

Проведем математич. действия с левой частью выражения :

$$m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt}\cdot dr_1 = (\vec{F}_1' + \vec{F}_1)\cdot dr_1 = m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt}\cdot\vec{v}_1 dt = m_1\cdot\vec{v}_1 d\vec{v}_1$$

Итак: $m_1\cdot\vec{v}_1 d\vec{v}_1 = (\vec{F}_1' + \vec{F}_1)\cdot dr_1$

Далее перепишем систему исходных уравнений и почленно их сложим:

$$\left.\begin{aligned} m_1\vec{v}_1\cdot d\vec{v}_1-(\vec{F}_1'+\vec{F}_1)d\vec{r}_1=0\\ m_2\vec{v}_2\cdot d\vec{v}_2-(\vec{F}_2'+\vec{F}_2)d\vec{r}_2=0\\ \bullet\quad\bullet\quad\bullet\qquad\qquad\\ m_n\vec{v}_n\cdot d\vec{v}_n-(\vec{F}_n'+\vec{F}_n)d\vec{r}_n=0 \end{aligned}\right\}$$

(+) сложим почленно

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}m_i(\vec{v}_i\cdot d\vec{v}_i)-\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i'+\vec{F}_i)d\vec{r}_i=0}$$

$$\sum_{i=1}^{n}m_i(\vec{v}_i\cdot d\vec{v}_i)=\sum_{i=1}^{n}d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right)=dE_k$$ - приращение кинетической энергии

$$-\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i'+\vec{F}_i)d\vec{r}_i=dE_{\Pi}$$ - приращение потенциальной энергии

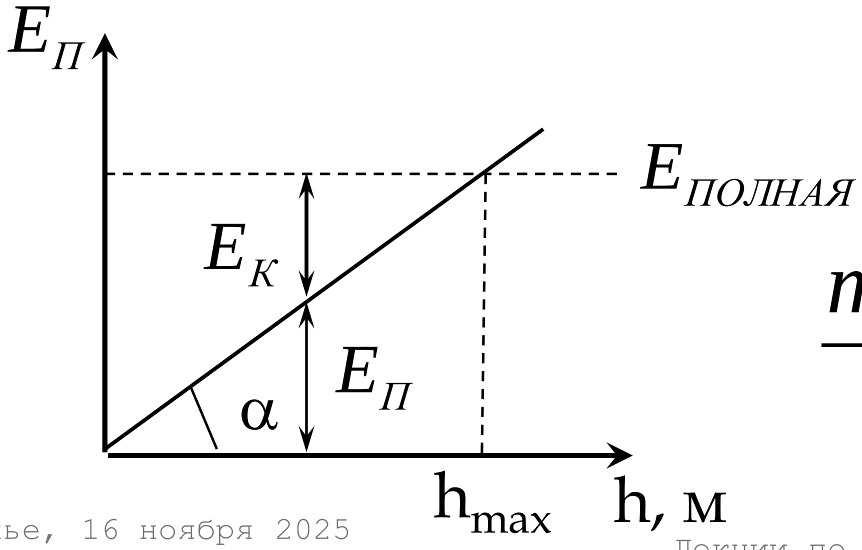
$$dE_k + dE_П = 0$$ Проинтегрируем: $$\int_1^2 d(E_k + E_П) = 0 \Longrightarrow$$

$$\boxed{E_k + E_П = const}$$

В консервативных системах полная механическая энергия сохраняется.

Графическое представление закона сохранения энергии.

Тело, массы m поднятое на высоту h обладает потенциальной энергией: $E_П = mgh$ - график прямая из (0,0).



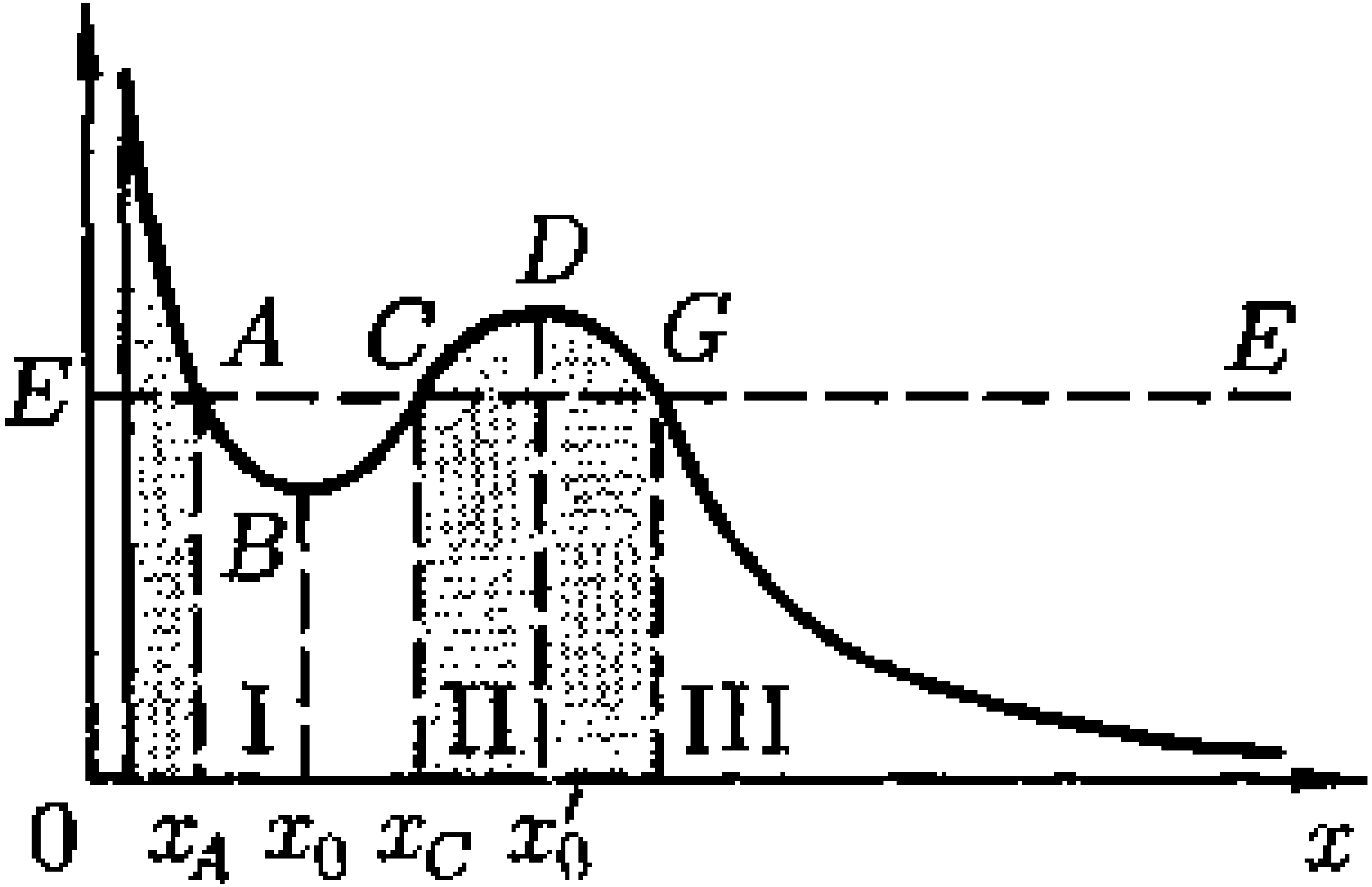
tgα=mg

Падая, тело уменьшает потенц. энергию и увеличивает кинетическую.

$$\frac{m \cdot v^2}{2} = mgh_{max} - mgh$$

$$v = \sqrt{2g(h_{max} - h)}$$

п



Механический удар тел

Удар заключается в следующем: кинетическая энергия за короткое время преобразуется в энергию упругой деформации. Опыты показывают, что относительная скорость тел после удара ниже расчетной, т. к. нет идеально упругих тел. Характеристикой этого факта служит коэффициент восстановления:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{v'_{после\,удара}}{v_{до\,удара}}}$$

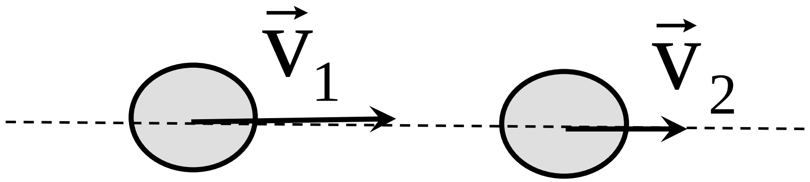
При $\varepsilon=0$ тела абсолютно **неупругие**

При $\varepsilon=1$ тела абсолютно **упругие**

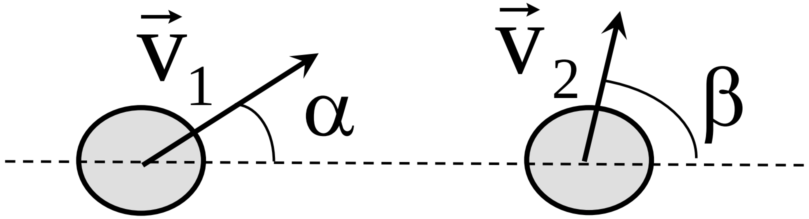
На практике $0<\varepsilon<1$ $\varepsilon=0{,}56$ – сталь, $\varepsilon=0{,}01$ – свинец.

Удар называется **центральным**, если тела до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центры масс.

Центральный



Не центральный



Абсолютно упругий удар – это такой удар, при котором вся кинетическая энергия системы до удара переходит полностью в кинетическую энергию после удара.

При этом выполняются законы сохранения импульса и энергии (потенциальная энергия не меняется).

Найдем выражения для скоростей после абс. упруг. удара:

$$\left.\begin{aligned} m_1\cdot\vec{v}_1+m_2\cdot\vec{v}_2&=m_1\cdot\vec{v}'_1+m_2\cdot\vec{v}'_2\\ \frac{m_1\cdot\vec{v}_1^2}{2}+\frac{m_2\cdot\vec{v}_2^2}{2}&=\frac{m_1\cdot\vec{v}_1'^2}{2}+\frac{m_2\cdot\vec{v}_2'^2}{2}\end{aligned}\right\}$$

Где: $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ – скорости шаров до удара

$\vec{v}'_1, \vec{v}'_2$ - после удара

Перенесем слагаемые с индексами 1 в одну часть, а с 2 в друг.

$$\left.\begin{aligned} m_1\cdot\left(\vec{v}_1-\vec{v}'_1\right)&=m_2\cdot\left(\vec{v}'_2-\vec{v}_2\right)\\ m_1\cdot\left(\vec{v}_1^2-\vec{v}_1'^2\right)&=m_2\cdot\left(\vec{v}_2'^2-\vec{v}_2^2\right)\end{aligned}\right\}$$

Раскроем разность квадратов во втором уравнении

$$\underbrace{m_1\cdot\left(\vec{v}_1-\vec{v}'_1\right)}\cdot\left(\vec{v}_1+\vec{v}'_1\right)=m_2\cdot\left(\vec{v}'_2-\vec{v}_2\right)\cdot\left(\vec{v}'_2+\vec{v}_2\right)$$

Заметим, что эти выражения равны.

$$m_2\cdot(\vec{v}_2'-\vec{v}_2)\cdot(\vec{v}_1+\vec{v}_1')=m_2\cdot(\vec{v}_2'-\vec{v}_2)\cdot(\vec{v}_2'+\vec{v}_2)$$

Сокращая на равные части, получим: $\vec{v}_1+\vec{v}_1'=\vec{v}_2'+\vec{v}_2$

Тогда, переписав систему уравнений имеем:

$$\left.\begin{aligned} m_1\cdot(\vec{v}_1-\vec{v}_1')&=m_2\cdot(\vec{v}_2'-\vec{v}_2)\\ \vec{v}_1+\vec{v}_1'&=\vec{v}_2'+\vec{v}_2 \end{aligned}\right\}$$

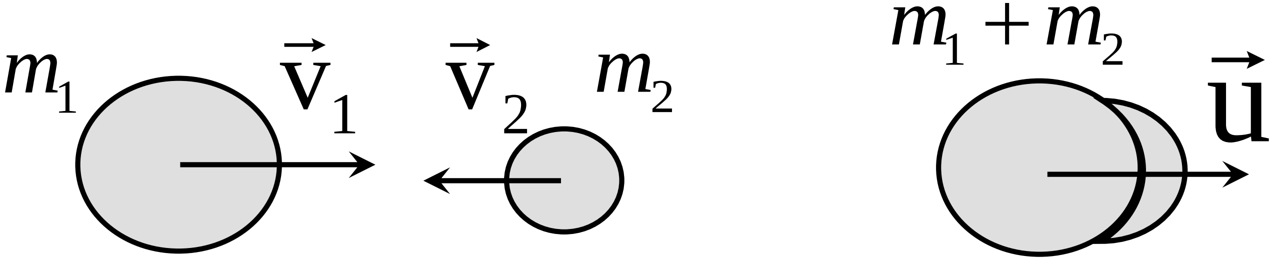
Решим систему относительно $\vec{v}_1', \vec{v}_2'$

$$\boxed{\vec{v}_1'=\frac{(m_1-m_2)\cdot\vec{v}_1+2m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}}$$

$$\boxed{\vec{v}_2'=\frac{(m_2-m_1)\cdot\vec{v}_2+2m_1\vec{v}_1}{m_1+m_2}}$$

Формулы для расчета скоростей после абсолютно упругого удара.

Абсолютно неупругий удар – это столкновение, после которого тела объединяются (слипаются) и далее двигаются совместно.



Тела «слиплись»
Пример – глиняные шары

Для абсолютно неупругого удара выполняется только закон сохранения импульса. Законом сохранения энергии очень трудно пользоваться, т.к. трудно учесть долю энергии, расходуемой на деформацию, изменение температуры и т. д. Следовательно:

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{u}$$

$$\boxed{\vec{u} = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2}{m_1 + m_2}}$$

- формула для скорости после неупругого удара $\{\otimes\}$

Что же происходит с кинетической энергией?

Из–за деформации тел происходит потеря энергии. Предлагаю ее найти.

$$\Delta E_k = \left(\frac{m_1 \cdot \vec{\mathrm{v}}_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2 \cdot \vec{\mathrm{v}}_2^{\,2}}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2) \cdot \vec{u}^{\,2}}{2} =$$

Потеря энергии

$$E_{k(до\ удара)} - E_{k(после\ удара)}$$

Подставим вместо u выражение $\{\otimes\}$ тогда:

$$\Delta E_k = \frac{m_1 \cdot m_2}{2(m_1 + m_2)} \left(\vec{\mathrm{v}}_1 - \vec{\mathrm{v}}_2\right)^2$$

Каждому студенту я предлагаю дома, самостоятельно получить эту формулу!

Ремарочка (КОЛЕБАНИЯ БЫ СЮДА ВСТАВИТЬ УСПЕЕМ-ИЗУЧИМ)

Литература

1. Трофимова Т.И. Курс физики. М.: Высш. шк., 1990.- 478 с.
2. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики М.: Высш. шк., 1989.- 608 с.
3. Савельев И.В. Общий курс физики. Т1. Механика. Молекулярная физика. М.: Наука, 1988.- 416 с.
4. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики.- М.: Наука, 1985.
5. Зисман Г.А., Тодес О.М. Курс общей физики. Т.1,2,3.-М.: Наука, 1974,1980
6. Сивухин Д.В. Курс общей Физики. – М.: Наука, 1986. Т.